ВЕСТНИК РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК, 2024, том 94, № 12, с. 1090–1099

ДОКЛАДЫ ЛАУРЕАТОВ БОЛЬШОЙ ЗОЛОТОЙ МЕДАЛИ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК 2023 ГОДА

РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ

ДОКЛАД ЛАУРЕАТА БОЛЬШОЙ ЗОЛОТОЙ МЕДАЛИ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА РАН 2023 ГОДА

 Х. Альтенбах[a,*]

[a]*Магдебургский университет Отто фон Герике, Магдебург, Германия*

**E-mail: holm.altenbach@ovgu.de*

Поступила в редакцию 23.08.2024 г.
После доработки 24.08.2024 г.
Принята к публикации 21.10.2024 г.

В статье обсуждаются метод реологических моделей и сами модели, а также моделирование определяющих уравнений на базе этого метода. Приводятся некоторые исторические сведения, излагается метод реологических моделей, предложенный В.А. Пальмовым. Кратко описаны одномерные уравнения, рассмотрены трёхмерные уравнения для изотропных сред. Отмечено, что метод реологических моделей для решения двумерных задач сплошных сред впервые был применён автором в начале его научной деятельности. В данной статье им представлены основные соотношения для упругих и неупругих пластин, рассмотрен пример комплексных определяющих уравнений для металлического сплава.
Статья подготовлена на основе доклада, видеозапись которого была представлена на Общем собрании членов РАН 28 мая 2024 г.

Ключевые слова: метод реологических моделей, определяющие уравнения, механика сплошных сред, поведение материалов, гипотезы эквивалентности.

DOI: 10.31857/S0869587324120035, **EDN:** RIXDTX

РЕОЛОГИЯ КАК НАУКА

Слово “реология” происходит от древнегреческого ρεω – течение, λωγωζ – наука. “Наука о течении” изучает деформацию и поведение потока материи, её предмет связан с жидкостями, мягкими и твёрдыми телами, а также материалами, находящимися под нагрузкой, превышающей пределы упругости или текучести при умеренных температурах. Реология включает в себя такие подразделы, как теория упругости, теория пластичности, теория вязкоупругости, механика жидкости и газов и др.

АЛЬТЕНБАХ Хольм – профессор и директор Института механики Магдебургского университета Отто фон Герике, иностранный член РАН.

Она занимается проблемами механики сплошных сред, а также выводом необходимых определяющих соотношений из микро- и наноструктур различных классов конденсированного вещества (например, макромолекулярных систем и суспензий).

Ошибочно утверждение, что реология не имеет никакого отношения к механике деформируемых твёрдых тел. Древнегреческое выражение “παντα ρωι” (“всё течёт”), восходящее к философу Гераклиту, применимо и в данном случае: реология может быть использована для деформируемых твёрдых тел.

Следуя работе [1], реологию можно разделить на четыре направления.

- *Феноменологическая реология* (макрореология) описывает поведение материалов при деформации и течении без учёта структуры материала.
- *Структурная реология* (микрореология) объясняет явления с точки зрения микроскопической структуры веществ.
- *Реометрия* изучает методы измерения для определения реологических свойств.
- *Прикладная реология* позволяет использовать выводы о реологическом поведении при проек-

тировании и разработке продуктов, технических процессов и систем.

Не так давно выделено направление *высокотемпературной реологии*, где верхний температурный предел измерений поднят до 1600°C в платиново-родиевых тиглях и до 1800°C в керамических. Основное внимание в статье будет уделено первым двум направлениям.

Конструкция водяных часов в Древнем Египте, возможно, была первой решённой реологической проблемой. Около 1600 г. до новой эры египтянам удалось выяснить, что вязкость воды зависит от температуры и эта зависимость влияет на работу водяных часов. В то время об определяющих моделях в механике не задумывались.

Первые научные реологические исследования относятся к XVII в. Например, Р. Гук открыл закон линейной упругости, а И. Ньютон ввёл понятие вязкости для жидкостей и предположил использовать пропорциональную зависимость между напряжением сдвига и скоростью деформации сдвига. После введения нормального (σ) и касательного (τ) напряжения, нормальной (ε) и касательной (γ) деформации, модуля упругости (E) и динамической вязкости (η) два закона в современных обозначениях могут быть представлены следующим образом:

$$\sigma = E\varepsilon \text{ закон Гука,} \tag{1.1}$$

$$\tau = \eta\dot{\gamma} \text{ закон Ньютона.} \tag{1.2}$$

Надстрочная точка означает производную по времени.

Первые две реологические модели (1.1) и (1.2) описывают идеальное поведение: оба уравнения линейны, а параметры материала могут быть оценены в простых испытаниях.

Начиная с XVII в. мы выделяем всё больше классов и подклассов реологических моделей[1]. Можно использовать следующую классификацию.

Идеальное поведение материала. Подклассы:

Жёсткие (недеформируемые), или евклидовы, твёрдые тела. Недеформируемость означает, что любые две материальные точки тела всегда находятся на одинаковом расстоянии друг от друга, независимо от внешних сил. Такие твёрдые тела изучал Ньютон.

Упругие линейные и нелинейные твёрдые тела. Этот тип деформируемых твёрдых тел был введён Р. Гуком и Р. Бойлем. Для линейно-упругого случая необходим только один параметр материала, характеризующий индивидуальную чисто упругую реакцию материала на нагрузку (модуль упругости или модуль Юнга). Полный набор уравнений теории упругости, предполагающий изотропию, линейное поведение и малые деформации, был представлен О.Л. Коши, Ш.О. де Кулоном, А. Навье, С.Д. Пуассоном. Соответствующий линейно-упругий изотропный трёхмерный определяющий закон для малых деформаций в современной (инвариантной) записи [4]:

$$\sigma = \lambda\, \mathrm{tr}\varepsilon I + 2\mu\varepsilon\,,$$

где σ, ε — тензор напряжений и тензор деформаций, I — единичный тензор второго порядка, tr — след (или первый инвариант), λ, μ — параметры Ламе. Очевидно, что количество определяющих параметров увеличивается с увеличением сложности реологической модели.

Невязкие, или паскалевские, жидкости. Невязкая жидкость — это жидкость с вязкостью, равной нулю, поэтому данная модель служит аналогом евклидова твёрдого тела. Такие жидкости были введены в научный оборот Л. Эйлером, И. Бернулли и Д.Б. Вентури.

Ньютоновские жидкости были введены И. Ньютоном, а также Г. Хагеном, Ж.Л. Пуазёйлем, М. Куэттом, А. Навье, Дж. Стоксом. Последние двое представили первый набор трёхмерных уравнений для линейно-вязких ньютоновских жидкостей, описывающих экспериментальные данные надлежащим образом. Соответствующий линейно-вязкий изотропный трёхмерный определяющий закон для малых скоростей деформации имеет такой вид в современной (инвариантной) записи [4]:

$$\sigma = \left(-p + \lambda^{v}\,\mathrm{tr}\,D\right)I + 2\mu^{v}D\,, \tag{1.3}$$

где $D = 0{,}5\left[\nabla v + \left(\nabla v\right)^{T}\right]$, v — вектор скорости, p — гидростатическое давление, а λ^{v}, μ^{v} — параметры Ламе, зависящие от скорости и температуры в случае вязких жидкостей. ∇ — оператор Набла (Гамильтона), $(\ldots)^{T}$ означает “транспонированный”. Если условие Стокса $(3\lambda^{v} + 2\mu^{v}) = 0$ справедливо, уравнение (1.3) вырождается в случай несжимаемой жидкости.

Линейная вязкоупругость характеризуется таким поведением материала, как ползучесть и релаксация. Её нельзя представить только упругими или вязкими моделями, необходимо использовать более сложные модели [5]. Некоторые варианты были предложены Дж. Максвеллом, У. Томсоном (лордом Кельвином) и Дж. Пойнтингом. В итоге Л. Больцман предложил принцип суперпозиции для такого поведения материала.

Обобщённые ньютоновские материалы. Это определение введено для материалов с более сложным поведением, которое обсуждалось, например, Ф.Н. Шведовым (коллоиды) или Ю. Бингамом (краски).

Значительный вклад в развитие реологии внёс целый ряд учёных, поэтому неудивительно, что многие реологические модели названы в их честь. Например, модель Гука (идеальная упругая модель),

[1] Исторический обзор реологии и реологических моделей представлен, например, в работах [2, 3].

модель Ньютона (идеальная вязкая модель), модель Сен-Венана (идеальная пластическая модель), модель Прандтля (последовательная модель идеальной упругости и идеальной пластичности), модель Кельвина–Фойгта (идеальная упругая и идеальная вязкая параллельная модель, впервые представленная Майером в 1874 г.), модель Максвелла (последовательная модель идеальной упругости и идеальной вязкости), модель Шведова (модель Прандтля параллельно с моделью идеальной упругости и дополненная последовательной идеальной упругой моделью), модель Бингама (параллельные модели идеальной пластичности и идеальной вязкости), модель Бюргерса (последовательные модели Максвелла и Кельвина–Фойгта) [6].

РАЗВИТИЕ РЕОЛОГИИ КАК САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ НАУЧНОЙ ОТРАСЛИ

Термин “реология” был предложен в конце 1920-х годов Ю. Бингамом и М. Рейнером [1] для названия науки, которая изучает течение и деформацию вещества. Для химика Бингама необходимость создания отрасли механики, занимающейся реологическими проблемами, была очевидна. Вопросы реологии требовали определённого пересечения с естественными и инженерными науками. Бингам в беседе с Рейнером: “Вот вы, инженер-строитель, и я, химик, работаем вместе над общими проблемами. С развитием коллоидной химии такая ситуация будет возникать всё чаще и чаще. Поэтому мы должны создать раздел физики, который будет заниматься подобными проблемами” [1]. 29 августа 1929 г. под руководством Бингама было основано Реологическое общество в Колумбусе, штат Огайо (США) [3].

Цель новой научной отрасли формулировалась так: с помощью методов реологии исследовать деформацию и течение вещества. Однако на первых порах существовали некоторые ограничения. Например, потоки электронов и тепла не учитывались. Позднее это ограничение было снято. Новые реологические модели позволяют качественно и количественно представить, а также предсказать различные типы течения и деформации. Кроме того, с использованием реологии стали возможны многие новые исследования в различных областях науки и техники, например, в материаловедении, геологии, пищевой технологии.

Реология и механика сплошных сред находятся в тесном взаимодействии. Определяющие уравнения связывают все макроскопические феноменологические переменные, описывающие поведение сплошной среды [7]. В упомянутых уравнениях, установленных в механике сплошных сред, содержатся параметры или функции параметров, которые должны быть идентифицированы. Один из возможных способов формулировки определяющих уравнений – их представление путём объединения реологических моделей. Кроме того, в рамках реологии разрабатываются экспериментальные методы для определения характеристик течения материалов. В работе [2] представлены следующие основы механики сплошных сред для реологии:

- сохранение массы,
- понятие напряжения,
- симметрия тензора напряжений,
- уравнения движения под действием напряжений,
- сохранение энергии.

Эти утверждения требуют изучения.

Во-первых, идёт серьёзная дискуссия, что обсуждать вначале – уравнения баланса или законы сохранения.

1. Уравнения баланса более общие по сравнению с законами сохранения [4]. Однако встречаются и другие утверждения: вместо двух членов в правой части уравнения, отвечающих за изменение свойств баланса, вводят три члена [8]. Эта концепция позволяет учитывать больше эффектов. Тем не менее, возможно, лучше иметь только два члена уравнения (один, связанный с поверхностными эффектами, другой – с объёмными), что также предполагается в работе [9].

2. В некоторых работах приводится аргумент, что если в правой части уравнения баланса нет никаких действий, то такое уравнение равно нулю. Это означает, что первый интеграл левой части постоянен, и мы приходим к закону сохранения.

3. В противоположность утверждениям, содержащимся в предыдущих пунктах, в работах [10–14] приводятся аргументы в пользу того, что законы сохранения более общие.

Во-вторых, учитывая прогресс в области обобщённых сред [15–18], симметрия тензора напряжений не всегда может быть гарантирована. Однако предположение, что условие симметрии тензора напряжений справедливо (это условие может быть доказано с помощью баланса моментов импульса), значительно упрощает уравнения деформации (уменьшается количество уравнений и параметров, которые должны быть определены). Это утверждение играет роль ограничения, и мы можем связать реологию с континуумами на основе такого предположения простым способом. В противном случае, даже если получится вывести определяющие уравнения для континуумов с симметричными и антисимметричными тензорами напряжений, усилия по идентификации дополнительных определяющих параметров резко возрастут.

В-третьих, необходимо учитывать второй закон термодинамики, который позволяет различать физически допустимые и недопустимые определяющие уравнения. Однако даже с учётом второго закона термодинамики мы не можем найти ответ на вопрос, как отразить индивидуальную реакцию материала на действующие нагрузки. Это требует дополнительного рассмотрения.

Для многих приложений достаточно пяти балансов: массы, импульса, момента импульса, энергии и энтропии. Если существуют модели, учитывающие различные масштабы, количество балансов может быть увеличено [14].

В настоящее время реологическое моделирование поведения материалов успешно применяется для решения многих практических задач, в частности в машиностроении и гражданском строительстве. Метод содержит в себе элементы дедуктивного и индуктивного подхода [4]. Простое комбинирование реологических элементов путём их параллельного или последовательного соединения позволяет создавать очень сложные модели. Однако параметры материала во многих случаях невозможно оценить с помощью простых базовых испытаний [19] – такие параметры оказываются результатом подгонки кривых. Кроме того, физическая допустимость сложных реологических моделей гарантирована, если каждый отдельный реологический элемент физически допустим.

Аксиомы реологии [6] приводят к дальнейшему упрощению моделей. Например, аксиома “под действием гидростатического давления все материалы ведут себя одинаково, как идеально упругие тела” вместе с предположением об изотропии позволяет разделить определяющие уравнения на гидростатическую (объёмную) и девиаторную части. Используя некоторые гипотезы эквивалентности [20, 21], одномерные реологические модели можно обобщить в трёхмерные. Однако следует отметить, что аксиомы реологии выполняются не всегда [22].

МЕТОД РЕОЛОГИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПАЛЬМОВА

В работе В.А. Пальмова [23] изложены основные идеи реологического моделирования. Исходя из аксиом реологии [6], известно, что гидростатическое соотношение отражает чисто упругое поведение, а девиаторные соотношения – упругое и неупругое поведение. Были выведены простые реологические модели, используемые для описания упругого, вязкого и пластического поведения. Простейшие одномерные уравнения можно легко обобщить на трёхмерный случай. Предполагается, что тензор напряжений можно представить, как

$$\sigma = s + \sigma_m I \,, \tag{3.1}$$

где $\boldsymbol{s}$ – девиаторная часть тензора напряжений, I – единичный тензор второго порядка, σ_m вычисляется по формуле

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\sigma \,. \tag{3.2}$$

Таким образом, уравнение (3.2) определяет среднее напряжение (оно же гидростатическое). По аналогии с уравнением (3.1) можно разбить тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ на девиаторную часть e и объёмную ε_v в форме

$$\varepsilon = e + \frac{1}{3}\varepsilon_v I \,, \tag{3.3}$$

где объёмная деформация вычисляется по формуле

$$\varepsilon_v = \mathrm{tr}\varepsilon \,. \tag{3.4}$$

Предположим, что можно сформулировать определяющие уравнения для реологического элемента α. В этом случае можно ввести уравнения для девиатора напряжений s_α, свободной энергии F, а также для энтропии S с учётом аксиомы равноприсутствия теории определяющих уравнений [24].

$$s_\alpha = s_\alpha(\theta, \nabla\theta, \varepsilon, e) \,,$$

$$F_\alpha = F_\alpha(\theta, \nabla\theta, \varepsilon, e) \,,$$

$$S_\alpha = S_\alpha(\theta, \nabla\theta, \varepsilon, e),$$

где θ – температура, $\nabla\theta$ – градиент температуры. Следует отметить, что можно добавить больше определяющих аргументов, но в случае термомеханических процессов этого достаточно.

Согласно [23], реологические модели (элементы) можно соединять параллельно и последовательно. Для первого случая справедливо

$$s = \sum_{\alpha=1}^{n} s_\alpha,\ e = e_1 = \ldots = e_\alpha = \ldots = e_n \,,$$

$$F = \sum_{\alpha=1}^{n} F_\alpha,\ S = \sum_{\alpha=1}^{n} S_\alpha \,,$$

во втором случае имеем

$$s = s_1 = \ldots = s_\alpha = \ldots = s_n,\ e = \sum_{\alpha=1}^{n} e_\alpha \,,$$

$$F = \sum_{\alpha=1}^{n} F_\alpha,\ S = \sum_{\alpha=1}^{n} S_\alpha \,.$$

Таким образом, можно включить n элементов, но сложные реологические модели состоят всегда из элементарных, соединённых последовательно или параллельно.

В заключение приведём три простых элемента:

• элемент Гука (упругий элемент)

$$\boldsymbol{s} = 2\mu \boldsymbol{e} \,,$$

здесь μ (модуль сдвига) единственный определяющий параметр;

• элемент Ньютона (вязкий элемент)

$$\boldsymbol{s} = 2\nu \dot{\boldsymbol{e}} \,,$$

здесь ν (коэффициент вязкости) единственный определяющий параметр;

• элемент Сен-Венана (пластический элемент)

$$\begin{cases} \dot{e} = 0, \text{ если } N(\sigma) < \sigma_{\mathrm{y}}, \\ \dot{e} = \dfrac{1}{\lambda} s, \text{ если } N(\sigma) = \sigma_{\mathrm{y}}. \end{cases}$$

$N(\sigma)$ – некоторая норма тензора напряжений, λ – “пластический множитель”, σ_{y} – предел текучести. Самые известные нормы – это условие пластичности Треска и фон Мизеса.

Помимо приведённых элементов существует

$$\sigma_{\mathrm{m}} = K\varepsilon_{\mathrm{v}} \,, \tag{3.5}$$

который является упругим соотношением между средним напряжением и объёмной деформацией. Определяющий параметр в этом случае – модуль объёмного сжатия K.

Комплексные определяющие соотношения можно получить с помощью соединения элементарных моделей:

• вязкоупругого соотношения типа Максвелла (последовательное соединение упругого и вязкого элементов) или Кельвина–Фойгта (параллельное соединение упомянутых элементов),

• упругопластического соотношения,

• упруго-вязкопластического соотношения,

• обобщённых моделей (n элементов Кельвина–Фойгта в последовательном соединении, n элементов Максвелла в параллельном соединении, а также модели с континуальным спектром при $n \to \infty$).

Метод В.А. Пальмова был обобщён на случай больших деформаций [25, 26]. Полное описание метода присутствует в последней книге В.А. Пальмова [9].

Метод реологических моделей до сих пор обсуждается во многих работах, так как не все вопросы удалось решить. К открытым вопросам относятся:

1. распространение метода на случай анизотропных сред. В этом случае уравнения (3.1)–(3.4) справедливы, но на них нельзя обосновать определяющие уравнения;

2. предположения для объёмного определяющего уравнения в форме (3.5). Экспериментальные результаты не всегда подтверждают уравнение (3.5), как показано в работе [22];

3. реологические модели в представлении Лагранжа или Эйлера. В механике сплошных сред лагранжевы и эйлеровы подходы возможны [9, 27] и эквивалентны. Однако долгие годы считалось, что подход Лагранжа предпочтителен в механике деформируемого твёрдого тела, так как он основан на чёткой конфигурации, которая известна для деформируемых твёрдых тел, а подход Эйлера предпочтителен в механике жидкостей и газов с актуальной конфигурацией. Следуя, например [9, 28], есть аргументы, что Эйлеров подход применим и в механике деформируемого твёрдого тела. В этом случае поведение пластического тела похоже на поведение жидкости [29–35], что объясняет возможность использования Эйлерова подхода.

Тем, кого интересуют последние результаты в области реологических моделей, можно рекомендовать обратиться к источникам [36–40], но следует отметить, что этот список далеко не полный.

ДВУМЕРНОЕ РЕОЛОГИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В 1980-е годы метод В.А. Пальмова был применён к двумерным сплошным средам [41]. В работе используется, согласно теории пластин, так называемый прямой подход, который основан на выводе основных уравнений для деформируемой поверхности [42–44], а также введены три элемента (идеально-упругая, идеально-вязкая и идеально-пластическая пластинки).

Главными переменными для реологических моделей пластин были:

• результирующие напряжения, то есть вектор поперечных сил F и тензор моментов M,

• деформации, то есть вектор поперечных сдвигов γ, тензор изгибных и кручёных деформаций μ,

• энергетическая переменная (в данном случае речь идёт о свободной энергии Гельмгольца H).

В работе [42] вместо тензора M был введён новый тензор

$$G = M \times n \,,$$

где n внешняя нормаль к поверхности, G – полярный тензор моментов [44]. Тогда результирующие напряжения можно вычислить, как

$$G = \langle a \cdot \sigma z \cdot a \rangle ,$$

где σ классический симметричный тензор напряжений, a – первый метрический тензор, z – координата в поперечном направлении, <...> означает интегрирование по толщине.

Можно легко вывести две модели.

1. Идеально-упругая пластина.

В этом случае свободная энергия оказывается функцией кинематических переменных и производная по времени может быть рассчитана

$$\rho \dot{H} = \frac{\partial \rho H}{\partial \gamma} \dot{\gamma} + \frac{\partial \rho H}{\partial \mu} \dot{\mu} \cdot \tag{4.1}$$

Тогда вектор поперечных сил и полярный тензор моментов

$$F = \frac{\partial \rho H}{\partial \gamma},\ G = \frac{\partial \rho H}{\partial \mu} , \tag{4.2}$$

и для случая свободной энергии в квадратичной форме

$$\rho H = \frac{1}{2} \gamma \Gamma \gamma + \frac{1}{2} \mu\, {}^{(4)}C \mu , \tag{4.3}$$

где Γ и ${}^{(4)}C$ – тензор второго порядка жёсткостей поперечных сдвигов и тензор четвёртого порядка жёсткостей пластины. Для случая изотропного материала

$$\Gamma = \Gamma_0 a,\ {}^{(4)}C = C_1 cc + C_2 \left(a_2 a_2 + a_4 a_4 \right), \tag{4.4}$$

причём e_α $(\alpha = 1, 2)$ двумерные ортогональные координаты и

$$\begin{gathered} a = e_\alpha e_\alpha = a_1,\ a_2 = e_1 e_1 - e_2 e_2, \\ c = e_1 e_2 - e_2 e_1,\ a_4 = e_1 e_2 + e_2 e_1 \cdot \end{gathered} \tag{4.5}$$

Таким образом, с учётом (4.1)–(4.5) получаем определяющие уравнения упругой пластины

$$F = \Gamma_0 \gamma,\ G = \left(C_1 - C_2 \right) (a\mu) a + 2C_2 \mu \cdot$$

С помощью задачи о граничных значениях (сопоставление двумерной и трёхмерной задач) можно вывести определяющие параметры (жёсткости) [43]

$$C_2 = \frac{Gh^3}{12},\ C_1 = C_2 \frac{1+\nu}{1-\nu},\ \Gamma_0 = \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 C_2 ,$$

где h – толщина пластины, Γ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона. Очевидно,

$$C = C_1 + C_2 = \frac{E}{12\left(1-\nu^2\right)} ,$$

классическая жёсткость на изгиб Кирхгофа [46]. Значение жёсткости поперечного сдвига в теории Тимошенко равно значению, впервые найденному в работе [47].

2. Идеально-вязкая пластина.

Далее предполагаем

$$\rho H = \rho H (\dot{\gamma}, \dot{\mu}) ,$$

и получим

$$F = \widetilde{\Gamma_0} \dot{\gamma},\ G = \left(\widetilde{C_1} - \widetilde{C_2} \right) (a\dot{\mu}) a + 2\widetilde{C_2} \dot{\mu} \ ,$$

где $\widetilde{\Gamma_0}, \widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}$ определяющие параметры (вязкости) двумерной сплошной среды. Повторяя выкладки, аналогичные упругому случаю, получим параметры

$$\widetilde{C_2} = \frac{\eta h^3}{12},\ \widetilde{C_1} = \widetilde{C_2} \frac{1+\kappa}{1-\kappa},\ \widetilde{\Gamma_0} = \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \widetilde{C_2} ,$$

η, κ – соответствующие параметры вязкости трёхмерной среды. Подробнее с вязкоупругим случаем можно ознакомиться в работе [48].

3. Идеально-пластическая пластина.

Третья модель – это идеально-пластическая двумерная среда. До сих пор ещё не удалось получить общее решение для этой задачи, так как необходимо ввести норму (условие пластичности) для сил и моментов. Можно предположить

$$\begin{cases} N(F) < F_y,\ \dot{\gamma} = 0, \\ N(F) = F_y,\ \dot{\gamma} = \alpha F,\ \alpha \geq 0, \\ N(G) < G_y,\ \dot{\mu} = 0, \\ N(G) = G_y,\ \dot{\mu} = \beta a \operatorname{dev} G,\ \beta \geq 0, \end{cases}$$

где

$$N(F) = |F|,\ N(\operatorname{dev} G) = \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{dev} G \operatorname{dev} G},$$

F_y, G_y предельные значения (переход в пластичность). Как было отмечено выше, общего решения для данной задачи нет. Частное решение приведено в работе [49]. Таким образом, в предположении

$$\sigma = \sigma_0 \operatorname{sign} z + n\tau + \tau n ,$$

с плоским тензором напряжений σ_0 и с вектором напряжений τ в поперечном направлении, можно получить

$$G = \sigma_0 \frac{h^2}{4},\ F = \tau h \ .$$

Тем самым получаем

$$N(G)^2 + \frac{h^2}{16}N(F)^2 < G_y,\ \dot{\gamma} = 0,\ \dot{\mu} = 0\,,$$

$$N(G)^2 + \frac{h^2}{16}N(F)^2 = G_y,\ \dot{\gamma} = A\alpha F,\ \dot{\mu} = \beta a \operatorname{dev} G\,.$$

Очевидно, что модель пластической пластины не может быть сформулирована так же, как это можно сделать в случае упругих или вязких пластин. Проблема возникает из-за “отсутствия толщины” в случае двумерных сред. Однако пластичность развивается по толщине, исключение составляет жёсткопластический материал, рассмотренный в работе [50]. Проблемы с пластической пластиной обсуждены в работе [51].

СОВРЕМЕННЫЕ РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В период 2010–2020-х годов в научной группе под руководством автора статьи были обсуждены современные реологические модели на базе линейных и нелинейных соотношений. В том числе рассмотрены модели для ползучести сплава и пластика, то есть материалов, находящихся под напряжениями ниже предела пластичности, но под воздействием повышенных температур (примерно 0.3 от температуры плавления материала). Такие материалы можно рассматривать как двухфазные: с твёрдой фазой и с мягкой фазой. Упругость для обеих фаз принималась одинаковой, а неупругость описывалась при помощи различных моделей. Уравнения для сплава приведены в работе [52], а для пластика в [53]. Главная идея модели была предложена в равных деформациях для обеих фаз. Тогда, следуя механике композитов [54], общее напряжение может быть вычислено, как

$$\sigma = \eta_s\sigma_s + \eta_h\sigma_h\,.$$

Здесь σ_h – напряжение в твёрдой фазе, σ_s – напряжение в мягкой фазе, η_s и η_h – объёмные доли обеих фаз, то есть

$$\eta_s + \eta_h = 1,$$

причём эти доли могут меняться со временем.

В дальнейшем были предложены одномерные определяющие уравнения, затем вычислены определяющие параметры и функции. С помощью гипотез об эквивалентности скалярных напряжений и деформаций с тензорными величинами можно вывести трёхмерные определяющие уравнения. Следует отметить, что гипотезы об эквивалентности для ползучести и повреждаемости разные, так как повреждаемость развивается только при растяжении. Ознакомиться с деталями подробнее автор предлагает в работах [55–57].

* * *

Реология служит мощным инструментом исследования, в том числе и для моделирования определяющих уравнений комплексного поведения материалов. Можно найти и другие приложения (бинарные смеси, пластмассы, геоматериалы и т.д.). Новые направления тесно связаны с интеграцией прямого тензорного исчисления [18], основ механики сплошных сред [8, 9, 13, 24, 58], а также с установлением гипотез эквивалентности [21, 59, 60].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Giesekus H.* Phänomenologische Rheologie. Eine Einführung. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1994.
2. *Tanner R.I.* Engineering Rheology. Oxford: Clarendon Press, 1985.
3. *Doraiswamy D.* The origins of rheology: a short historical excursion // Rheology Bulletin/ 200, vol. 71, no. 1, pp. 7–17.
4. *Altenbach H.* Kontinuumsmechanik – Eine elementare Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen, 4. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer, 2018.
5. *Christensen R.M.* Theory of viscoelasticity – an introduction, 2nd edn. New York et al.: Academic Press, 1982.
6. *Рейнер М.* Реология. М.: Наука, 1965.

   Rayner M. Rheology. Moscow: Nauka, 1965. (In Russ.)
7. *Krawietz A.* Materialtheorie – Mathematische Beschreibung des phänomenologischen thermomechanischen Verhaltens. Berlin, Heidelberg: Springer, 1986.
8. *Hutter K., Jöhnk K.* Continuum methods of physical modeling-continuum mechanics, dimensional analysis, turbulence. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004.
9. *Пальмов В.А.* Нелинейная механика деформируемых тел. СПб: Изд-во Политехнического университета, 2014.

   Palmov V.A. Nonlinear mechanics of deformable bodies. St. Petersburg: Publishing House of the Polytechnic University, 2014. (In Russ.)
10. *Ruggeri T.* Galilean invariance and entropy principle for systems of balance laws // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 1989, vol. 1, no. 1, pp. 3–20.
11. *Boillat G., Ruggeri T.* On the shock structure problem for hyperbolic system of balance laws and convex entropy // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 1998, vol. 10, no. 5, pp. 292–295.
12. *Müller I., Ruggeri T.* Rational Extended Thermodynamics, 2nd edn. New York: Springer, 1998.
13. *Müller W.H.* An Expedition to Continuum Theory. Dordrecht: Springer, 2014.

14. *Müller W.H., Vilchevskaya E.N., Weiss W.* Micropolar theory with production of rotational inertia: a farewell to material description // Physical Mesomechanics. 2017, vol. 20, no. 3, pp. 250–262.

15. *Altenbach H., Eremeyev V.A.* (eds) Generalized continua – from the theory to engineering applications, CISM International Centre for Mechanical Sciences, vol. 541. Vienna: Springer, 2011.

16. *Altenbach H., Maugin G.A., Erofeev V.* (eds) Mechanics of generalized continua, Advanced Structured Materials, vol. 7. Berlin, Heidelberg: Springer, 2011.

17. *Altenbach H., Forest S., Krivtsov A.* (eds) Generalized continua as models for materials with multi-scale effects or under multi-field actions, Advanced Structured Materials, vol. 22. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013.

18. *Eremeyev V.A., Lebedev L.P., Altenbach H.* Foundations of Micropolar Mechanics. Springer-Briefs in Applied Sciences and Technology – Continuum Mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013.

19. *Blumenauer H.* (Hrsg.) Werkstoffprüfung, 6. Aufl. Leipzig, Stuttgart: Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1994.

20. *Altenbach H., Bolchoun A., Kolupaev V.A.* Phenomenological Yield and Failure Criteria // Plasticity of Pressure-Sensitive Materials (ed. by Altenbach H., Öchsner A.). Berlin, Heidelberg: Springer, 2014, pp. 49–152.

21. *Kolupaev V.A.* Equivalent stress concept for limit state analysis, Advanced Structured Mechanics, vol. 86. Cham: Springer, 2018.

22. *Bridgman P.W.* The physics of high pressure. London: G. Bell and Sons, 1949.

23. *Пальмов В.А.* Колебания упруго-пластических тел. М.: Наука, 1976.

Palmov V.A. Vibrations of elastic-plastic bodies. M.: Nauka, 1976. (In Russ.)

24. *Haupt P.* Continuum Mechanics and Theory of Materials, 2nd edn. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004.

25. *Palmow W.A.* Rheologische Modelle für Materialien bei endlichen Deformationen // Technische Mechanik. 1984, vol. 5, no. 4, pp. 20–31.

26. *Palmov V.A.* Large strains in viscoelastoplasticity // Acta Mechanica. 1997, vol. 125, no. 1, pp.129–139.

27. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Наука, 1975.

Trusdell K. The initial course of rational continuum mechanics. M.: Nauka, 1975. (In Russ.)

28. *Bruhns O.T.* History of plasticity. In: Altenbach H, Öchsner A (eds) Encyclopedia of Continuum Mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2020, pp. 1129–1190.

29. *Lévy M.* Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état // Comptes rendus de l'Académie des Sciences. 1870, vol. 70, pp. 1323–1325.

30. *von Mises R.* Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand, Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1913, pp. 582–592.

31. *Prandtl L.* Über die Eindringungsfestigkeit (Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Schneiden // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1921, vol. 1, no. 1, pp. 15–20.

32. *Hencky H.* Die Bewegungsgleichungen beim nichtstationären Fließen plastischer Massen // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1925, vol. 5, no. 3, pp. 144–146.

33. *Hodge P.G., Prager, W.* Theorie ideal plastischer Körper. Wien: Springer, 1954.

34. *Климов Д.М., Петров А.Г., Георгиевский Д.В.* Вязкопластические течения. Динамический хаос, устойчивость, перемешивание. М.: Наука, 2005.

Klimov D.M., Petrov A.G., Georgievsky D.V. Viscoplastic flows. Dynamic chaos, stability, mixing. M.: Nauka, 2005. (In Russ.)

35. *Bruhns O.T.* The Prandtl-Reuss equations revisited // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2014, vol. 94, no. 3, pp. 187–222.

36. *Shutov A.V., Kreißig R.* Finite strain viscoplasticity with nonlinear kinematic hardening: phenomenological modeling and time integration // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2008, vol. 197, no. 21, pp. 2015–2029.

37. *Bröcker C., Matzenmiller A.* An enhanced concept of rheological models to represent nonlinear thermoviscoplasticity and its energy storage behavior // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2013, vol. 25, no. 6, pp. 749–778.

38. *Bröcker C., Matzenmiller A.* An enhanced concept of rheological models to represent nonlinear thermoviscoplasticity and its energy storage behavior, Part 2: Spatial generalization for small strains // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2015, vol. 27, no. 3, pp. 325–347.

39. *Kießling R., Landgraf R., Scherzer R., Ihlemann J.* Introducing the concept of directly connected rheological elements by reviewing rheological models at large strains // International Journal of Solids and Structures. 2016, vol. 98, pp. 650–667.

40. *Seifert T.* Models of cyclic plasticity for low-cycle and thermomechanical fatigue life assessment. In: Altenbach H, Ganczarski A (eds) Advanced Theories for Deformation, Damage and Failure in Materials, CISM international centre for mechanical sciences courses and lectures, vol 605. Springer, 2022, pp. 177–234.

41. *Altenbach H.* Zur Theorie der inhomogenen Cosserat-Platten // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. 1985, vol. 65, no. 12, pp. 638–641.

42. *Palmow W.A., Altenbach H.* Über eine Cosseratsche Theorie für elastische Platten // Technische Mechanik. 1982, vol. 3, no. 3, pp. 5–9.

43. *Альтенбах Х.* Определение модулей упругости для пластин, изготовленных из неоднородного по толщине анизотропного материала // Механика твёрдого тела. 1987. № 1. С. 139–146.

Altenbach X. Determination of elastic modulus for plates made of nonuniform anisotropic material in thickness // Solid state mechanics. 1987, no. 1, pp. 139–146. (In Russ.)

44. *Zhilin P.A.* Mechanics of deformable directed surfaces // International Journal of Solids and Structures. 1976, vol. 12, no. 9, 10, pp. 635–648.

45. *Aßmus M., Eisenträger J., Altenbach H.* Projector representation of isotropic linear elastic material laws for directed surfaces // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2017, vol. 97, no. 12, pp. 1625–1634.

46. *Timoshenko S.,Woinowsky-Krieger S.* Theory of Plates and Shells. New York: McGraw-Hill, 1959.

47. *Mindlin R.D.* Influence of rotatory inertia and shear deformation on flexural motion of isotropic, elastic plates // Journal of Applied Mechanics. 1951, vol. 18, no. 1, pp. 31–38.

48. *Альтенбах Х.* Прямая теория вязкоупругих пластин // Механика твёрдого тела. 1988. № 2. С. 164–169.

Altenbach X. Direct theory of viscoelastic plates // Mechanics of a solid body, 1988, no. 2, pp. 164–169. (In Russ.)

49. *Пальмов В.А.* К теории пластин Коссера // Труды ЛПИ. Л.: 1982. Т. 386. С. 3–8.

Palmov V.A. K Kosser plate theory // Proceedings of the LPI. L.: 1982, vol. 386, pp. 3–8. (In Russ.)

50. *Наумов В.Н., Пальмов В.А.* Деформирование жёсткопластических пластин с упрочнением // Труды ЛПИ. Л.: 1982. Т. 386. С. 9–14.

Naumov V.N., Palmov V.A. Deformation of rigid plastic plates with hardening // Trudy LPI. L.: 1982, vol. 386, pp. 9–14. (In Russ.)

51. *Aßmus M., Altenbach H.* On viscoelasticity in the theory of geometrically linear plates // Altenbach H., Öchsner A. (eds) State of the art and future trends in material modeling, Advanced Structured Materials. Cham: Springer International Publishing, 2019, vol. 100, pp. 1–22.

52. *Naumenko K., Altenbach H., Kutschke A.* A combined model for hardening, softening, and damage processes in advanced heat resistant steels at elevated temperature // International Journal of Damage Mechanics. 2011, vol. 20, no. 4, pp. 578–597.

53. *Altenbach H., Girchenko A., Kutschke A., Naumenko K.* Creep Behavior Modeling of Polyoxymethylene (POM) Applying Rheological Models // Inelastic Behavior of Materials and Structures Under Monotonic and Cyclic Loading (ed. by Altenbach H., Brünig M.). Cham: Springer, Advanced Structured Materials, 2015, vol. 57, pp. 1–15.

54. *Altenbach H., Altenbach J., Kissing W.* Mechanics of Composite Structural Elements, 2nd ed., Singapore: Springer, 2018.

55. *Eisenträger J., Naumenko K., Altenbach H.* Calibration of a phase mixture model for hardening and softening regimes in tempered martensitic steel over wide stress and temperature ranges // Journal of Strain Analysis and Engineering Design. 2018, vol. 53, no. 3, pp. 156–177.

56. *Eisenträger J., Naumenko K., Altenbach H.* Numerical implementation of a phase mixture model for rate-dependent inelasticity of tempered martensitic steels // Acta Mechanica. 2018, vol. 229, no. 7, pp. 3051–3068.

57. *Eisenträger J., Naumenko K., Altenbach H.* Numerical analysis of a steam turbine rotor subjected to thermomechanical cyclic loads // Technische Mechnik. 2019, vol. 19, no. 3, pp. 261–281.

58. *Жилин П.А.* Рациональная механика сплошных сред. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012.

Zhilin P.A. Rational mechanics of continuous media. St. Petersburg: Publishing House of the Polytechnic University. Unita, 2012. (In Russ.)

59. *Altenbach H., Altenbach J., Zolochevsky A.* Erweiterte Deformationsmodelle und Versagenskriterien der Werkstoffmechanik. Leipzig Stuttgart: Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1995.

60. *Altenbach H., Bolchoun A., Kolupaev V.A.* Phenomenological Yield and Failure Criteria. In: Plasticity of Pressure-Sensitive Materials (ed. by Altenbach H., Öchsner A.). Berlin, Heidelberg: Springer, 2014, pp. 49–152.

RHEOLOGICAL MODELING

REPORT BY THE LAUREATE OF THE 2023 M.V. LOMONOSOV GRAND GOLD MEDAL OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

H. Altenbach[a],*

[a]Otto von Guericke University of Magdeburg, Magdeburg, Germany
**E-mail: holm.altenbach@ovgu.de*

The article discusses the method of rheological models and the models themselves, as well as modeling of the defining equations based on this method. Some historical information is given, and the method of rheological models proposed by V.A. Palmov is presented. One-dimensional equations are briefly described, three-dimensional equations for isotropic media are considered. It is noted that the method of rheological models for solving two-dimensional problems of continuous media was first applied by the author at the beginning of his scientific activity. In this article, he presents the basic relations for elastic and inelastic plates, and considers an example of complex defining equations for a metal alloy. The article was prepared on the basis of a report, the video of which was presented at the General Meeting of RAS Members on May 28, 2024.

Keywords: rheological model method, defining equations, continuum mechanics, behavior of materials, equivalence hypotheses.